PROPRIÉTÉS RÉGULARISANTES DE CERTAINS SEMI-GROUPES NON LINÉAIRES

BY

H. BRÉZIS

ABSTRACT

Let ϕ be a convex l.s.c. function from H (Hilbert) into $]-\infty, \infty]$ and $D(\phi) = \{u \in H;\ \phi(u) < +\infty\}$. It is proved that for every $u_0 \in \overline{D(\phi)}$ the equation $-(du/dt)(t) \in \partial\phi(u(t))$, $u(0) = u_0$ has a solution satisfying $|(du(t)/dt)| \leqq (c_1/t) + c_2$. The behavior of $u(t)$ in the neighborhood of $t = 0$ and $t = +\infty$ as well as the inhomogeneous equation $(du(t)/dt) + \partial\phi(u(t)) \ni f(t)$ are then studied. Solutions of some nonlinear boundary value problems are given as applications.

Soit H un espace de Hilbert sur R et soit $\phi: H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe semi continue inférieurement (s.c.i.), $\phi \not\equiv +\infty$. On pose:

$$D(\phi) = \{u \in H;\ \phi(u) < +\infty\}$$

$$Au = \partial\phi(u) = \{f \in H;\ \phi(v) - \phi(u) \geqq (f, v-u)\ \ \forall v \in H\}$$

$$D(A) = \{u \in D(\phi);\ Au \neq \phi\}$$

A^0u désigne l'élément de norme minimale du convexe fermé Au. Il est bien connu que A est maximal monotone au sens de Minty et Browder et donc $-A$ engendre un semi-groupe continu de contractions $S(t)$ sur $\overline{D(A)}$ (cf. [5], [6], [8], [9]). Rappelons que pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction unique $u \in C([0, +\infty[;H)$ vérifiant

(1) u est dérivable p.p. sur $]0, +\infty[$

(2) u est dérivable à droite pour tout $t > 0$.

(3) $u(t) \in D(A)$ pour tout $t > 0$.

(4) $\dfrac{d^+u}{dt}(t) + A^0u(t) = 0$ pour tout $t > 0$

Received October 18, 1970

(5) $u(0) = u_0$

(6) $\left| \dfrac{d^+u}{dt}(t) \right| \leqq |A^0 u_0|$ pour tout $t > 0$

On obtient $S(t)$ en prolongeant par continuité à $\overline{D(A)}$ l'application $u_0 \mapsto u(t)$. $S(t)u_0$ peut être considéré comme la solution généralisée du problème (4), (5); toutefois dans le cas d'un opérateur A maximal monotone général nous ne savons pas en quel sens (4) est vérifié. Nous montrons que si $A = \partial\phi$, alors $S(t)$ jouit d'une propriété régularisante comparable en un certain sens à celle des semi-groupes linéaires analytiques; plus précisément on prouve que même si $u_0 \in \overline{D(A)}$, le problème (4), (5) admet une solution "forte" dès que $t > 0$.

1. Le résultat principal.

THÉORÈME 1. *Soit* $u_0 \in \overline{D(A)}$, *alors* $S(t)u_0 \in D(A)$ *pour tout* $t > 0$ *et de plus on a*

$$|A^0 S(t)u_0| \leqq (1+\varepsilon)|A^0 v| + \left(\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)\frac{|u_0 - v|}{t} \tag{7}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t > 0,\ \forall v \in D(A).$$

Autrement dit, pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, *il existe une fonction unique* $u \in C([0, +\infty[;H)$ *vérifiant*

(8) *u est dérivable p.p. sur* $]0, +\infty[$

(9) *u est dérivable à droite pour tout* $t > 0$

(10) $u(t) \in D(A)$ *pour tout* $t > 0$.

(11) $\dfrac{d^+u}{dt}(t) + A^0 u(t) = 0$ *pour tout* $t > 0$

(12) $u(0) = u_0$

De plus on a

$$\left| \frac{d^+u}{dt}(t) \right| \leqq (1+\varepsilon)|A^0 v| + \left(\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)\frac{|u_0 - v|}{t} \tag{13}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t > 0,\ \forall v \in D(A).$$

REMARQUE 1. L'estimation (7) permet de conclure dans le cas où A est linéaire que la fonction $t \mapsto u(t)$ peut être prolongée à un secteur du plan complexe en une fonction analytique. Ce résultat n'est pas valable en général dans le cas non linéaire et il serait intéressant de déterminer la classe (probablement assez restreinte) des opérateurs non linéaires A donnant lieu à une telle propr été.

REMARQUE 2. Lorsque $u_0 \in D(A)$, on retrouve (6) à partir de (13) en prenant $v = u_0$ et en faisant tendre ε vers 0.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

Unicité. Soient u_1 et u_2 deux solutions et soient $0 < t' \leqq t$. Après soustraction des équations (11) correspondantes, multiplication par $u_1 - u_2$ et intégration sur $]t', t[$, il vient

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqq |u_1(t') - u_2(t')|$$

Faisant tendre t' vers 0, on obtient $u_1 = u_2$.

Existence. Soit A_λ la régularisée Yosida de A i.e. $A_\lambda = \dfrac{I - (I + \lambda A)^{-1}}{\lambda}$

Soit u_λ la solution de l'équation

$$\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0, \qquad u_\lambda(0) = u_0$$

On sait que pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, $\lim_{\lambda \to 0} u_\lambda(t) = S(t)u_0$.

Par ailleurs $A_\lambda = \partial\phi_\lambda$ où $\phi_\lambda(u) = \inf_{v \in H}\{1/2\lambda\,|u - v|^2 + \phi(v)\}$ est une fonction Fréchet différentiable sur H (cf. Appendice). Nous commençons par établir (13) pour u_λ i.e.

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| \leqq (1+\varepsilon)|A_\lambda v| + \frac{(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon}\frac{|u_0 - v|}{t}, \tag{14}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall t > 0, \; \forall v \in H$$

Pour simplifier les notations, on supprime dorénavant l'indice λ et on cherche à prouver (13) moyennant l'hypothèse supplémentaire: ϕ est Fréchet différentiable sur H et $A = \partial\phi$ est lipschitzien.

Soit $v \in H$ *fixé* et soit $f = -Av$; on a donc

$$\phi(u) - \phi(v) \geqq -(f, u - v) \qquad \forall u \in H$$

Posant $\tilde{\phi}(u) = \phi(u) - \phi(v) + (f, u - v)$, il vient $\tilde{\phi}(u) \geqq 0$ $\forall u \in H$ et $\tilde{\phi}(v) = 0$.

De plus, l'équation (11) s'écrit

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial\tilde{\phi}(u(t)) = f \qquad \forall t > 0 \tag{15}$$

Première estimation. On a

$$\tilde{\phi}(v) - \tilde{\phi}(u(t)) \geqq (\partial\tilde{\phi}(u(t)), v - u(t)) = \left(f - \frac{du}{dt}(t), v - u(t)\right). \tag{16}$$

Or $\tilde{\phi}(v) = 0$; d'où intégrant (16) sur $]0, T[$ il vient

$$\int_0^T \tilde{\phi}(u(t))dt \leqq \int_0^T |f|\,|v-u(t)|\,dt + \tfrac{1}{2}|u(0)-v|^2 - \tfrac{1}{2}|u(T)-v|^2$$

$$\leqq |f|\int_0^T |v-u(t)|\,dt + \tfrac{1}{2}|u(0)-v|^2.$$

Par ailleurs

$$|u(t) - S(t)v| \leqq |u(0) - v|$$

et

$$|S(t)v - v| \leqq t|Av| = t|f|.$$

D'où

$$\int_0^T \tilde{\phi}(u(t))dt \leqq Tf|\,|u(0)-v| + \tfrac{1}{2}T^2|f|^2 + \tfrac{1}{2}|u(0)-v|^2$$

$$\leqq T^2|f|^2 + |u(0)-v|^2$$

Enfin, on a

$$\text{(17)} \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{\phi}(u(t))dt \leqq T|f|^2 + \frac{1}{T}|u(0)-v|^2$$

Seconde estimation. Multiplant (15) par du/dt et intégrant sur $]0,T[$ on obtient

$$\int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt + \tilde{\phi}(u(T)) - \tilde{\phi}(u(0)) = \int_0^T \left(f, \frac{du}{dt}\right)dt$$

(noter que $d/dt\,\tilde{\phi}(u) = (\partial\tilde{\phi}(u), du/dt)$).
Comme $\tilde{\phi}(u(T)) \geqq 0$, on a

$$\int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt \leqq \tilde{\phi}(u(0)) + \sqrt{T}|f|\left(\int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc

$$\left(\int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \sqrt{T}|f| + \sqrt{\tilde{\phi}(u(0))}.$$

Enfin, puisque $|du/dt|$ est décroissant, on a

$$\text{(18)} \qquad \left|\frac{du}{dt}(T)\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq |f| + \frac{\sqrt{\tilde{\phi}(u(0))}}{\sqrt{T}}$$

Preuve de (13). Soit $t > 0$ et soit $\theta \in]0, t[$. Le théorème de la moyenne et l'inéquation (17) appliqués avec $T = \theta$ montrent qu'il existe $t_0 \in [0, \theta]$ tel que $\tilde{\phi}(u(t_0)) \leqq \theta |f|^2 + 1/\theta |u_0 - v|^2$.

L'estimation (18) appliquée sur l'intervalle $[t_0, t]$ au lieu de $[0, T]$ conduit

$$\left|\frac{du}{dt}(t)\right| \leqq |f| + \frac{\sqrt{\tilde{\phi}(u(t_0))}}{\sqrt{t - t_0}} \leqq |f| + \frac{1}{\sqrt{t-\theta}}\left(\sqrt{\theta}|f| + \frac{1}{\sqrt{\theta}}|u_0 - v|\right)$$

$$\leqq \left(1 + \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{t-\theta}}\right)|f| + \frac{1}{\sqrt{\theta(t-\theta)}}|u_0 - v|.$$

Enfin $\varepsilon > 0$ étant donné, on choisit

$$\theta = \frac{t\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \text{ de sorte que } \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{t-\theta}} = \varepsilon \text{ et } \frac{1}{\sqrt{\theta(t-\theta)}} = \left(\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)\frac{1}{t};$$

on obtient alors (13).

Revenons au cas général où ϕ est seulement supposé convexe s.c.i. Nous avons établi que:

$$|A_\lambda u_\lambda(t)| = \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| \leqq (1+\varepsilon)|A^0 v| + \left(\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)\frac{|u_0 - v|}{t}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall t > 0, \ \forall v \in D(A).$$

Il en résulte que pour tout $t > 0$ fixé, $|A_\lambda u_\lambda(t)|$ est borné quand $\lambda \to 0$. Puisque $u_\lambda(t) \to S(t)u_0$ quand $\lambda \to 0$, on en déduit que $S(t)u_0 \in D(A)$ pour tout $t > 0$ et

$$|A^0 S(t)u_0| \leqq (1+\varepsilon)|A^0 v| + \left(\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)\frac{|u_0 - v|}{t}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall t > 0, \ \forall v \in D(A).$$

Proposition 2. *Soit $u_0 \in \overline{D(A)}$ et soit $u(t) = S(t)u_0$; alors la fonction $t \mapsto \phi(u(t))$ est décroissante, convexe et uniformément lipschitzienne sur tout intervalle $[\delta, +\infty[$, $\delta > 0$. De plus la fonction $t \mapsto \phi(u(t))$ est dérivable à droite en tout $t > 0$ et*

$$\frac{d^+}{dt}\phi(u(t)) = -\left|\frac{d^+}{dt}u(t)\right|^2 \qquad \forall t > 0.$$

Démonstration Soit $t > \delta$ et soit $h > 0$. On a

$$\phi(u(t+h)) - \phi(u(t)) \geqq -\left(\frac{d^+}{dt}u(t), u(t+h) - u(t)\right)$$

et

$$\phi(u(t)) - \phi(u(t+h)) \geqq -\left(\frac{d^+}{dt}u(t+h),\, u(t) - u(t+h)).\right)$$

Or

$$\left|\frac{d^+u}{dt}(t+h)\right| \leqq \left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right| \leqq \left|\frac{d^+u}{dt}(\delta)\right|$$

et

$$|u(t+h) - u(t)| \leqq h\left|\frac{d^+u}{dt}(\delta)\right|.$$

Par conséquent $|\phi(u(t+h)) - \phi(u(t))| \leqq h|(d^+u/dt)(\delta)|^2$ et $\phi(u(t))$ est donc lipschitzien sur $[\delta, +\infty[$.

On a

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{d^+}{dt}u(t),\, \frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right) = \left|\frac{d^+}{dt}u(t)\right|^2.$$

Par ailleurs, on sait (cf [6]) que la fonction $t \mapsto (d^+/dt)u(t)$ est continue à droite; donc

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{d^+}{dt}u(t+h), \frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right) = \left|\frac{d^+}{dt}u(t)\right|^2.$$

On en déduit que $\phi(u(t))$ est décroissante (resp. convexe) puisque $(d^+/dt)\,\phi(u(t)) \leqq 0$ (resp. $(d^+/dt)\,\phi(u(t))$ est croissante).

Remarque 3. Soit $E(Au(t))$ l'espace *affine* fermé engendré par $Au(t)$ et soit $E^0(Au(t))$ la projection de 0 sur $E(Au(t))$.

Alors on a

$$-\frac{d^+}{dt}u(t) = A^0u(t) = E^0(Au(t)) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad]0, +\infty[.$$

En effet, supposons que les fonctions $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto \phi(u(t))$ soient dérivables en t_0 et soit $f \in Au(t_0)$. On a

$$\phi(v) - \phi(u(t_0)) \geqq (f, v - u(t_0)) \quad \forall v \in H.$$

Prenant $v = u(t_0 \pm h)$, $h > 0$, on obtient après division par h et passage à la limite quand $h \to 0$

$$\frac{d}{dt}\phi(u(t_0)) = \left(f, \frac{du}{dt}(t_0)\right) = -\left(\frac{du}{dt}(t_0),\, \frac{du}{dt}(t_0)\right)$$

Autrement dit

$$-\frac{du}{dt}(t_0) \text{ est la projection de 0 sur } E\,(Au(t_0)).$$

2. Comportement de u au voisinage de $t = 0$ *et* $t = +\infty$.

On peut préciser le comportement de $u(t) = S(t)u_0$ au voisinage de $t = 0$.

PROPOSITION 3. *Soit* $u_0 \in \overline{D(A)}$, *alors* $\phi(u) \in L^1(0, \delta)$ $\forall \delta > 0$.
On a $u_0 \in D(\phi)$ *si et seulement si*

$$\frac{d^+u}{dt} \in L^2(0, \delta; H) \qquad \forall \delta > 0.$$

Dans ce cas, u vérifie

$$\phi(u_0) - \phi(u(t)) = \int_0^t \left|\frac{d^+u}{dt}(s)\right|^2 ds \qquad \forall t > 0.$$

En particulier si $u_0 \in D(\phi)$ *on a* $\forall t > 0$

$$\left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right| \leqq \frac{\sqrt{\phi(u_0) - \phi(u(t))}}{\sqrt{t}}, \quad \frac{|u(t) - u_0|}{\sqrt{t}} \leqq \sqrt{\phi(u_0) - \phi(u(t))}$$

et

$$\lim_{t \to 0} \phi(u(t)) = \phi(u_0).$$

REMARQUE 4. On notera que $D(A) \subset D(\phi)$ et $\overline{D(A)} = \overline{D(\phi)}$.
En effet soit $u \in D(\phi)$ et soit $u_\varepsilon = (I + \varepsilon A)^{-1}u$.

On a

$$\phi(u) - \phi(u_\varepsilon) \geqq \left(\frac{u - u_\varepsilon}{\varepsilon}, u - u_\varepsilon\right)$$

puisque $u - u_\varepsilon$ appartient à $\varepsilon\partial\phi(u_\varepsilon)$. Par ailleurs $\phi(u_\varepsilon) \geqq \phi(v) + (f, u_\varepsilon - v)$ où $f \in \partial\phi(v)$. Il en résulte que u_ε est borné et donc $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = u$. D' où $u \in \overline{D(A)}$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3. Il est immédiat, grâce à (17), que $\phi(u) \in L^1(0, \delta)$. Supposons d'abord que $u_0 \in D(\phi)$ et reprenons l'approximation introduite dans la démonstration du Théorème 1. On a alors

$$\phi_\lambda(u_0) - \phi_\lambda(u_\lambda(\delta)) = \int_0^\delta \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 dt$$

Or

$$\phi_\lambda(v) = \frac{1}{2\lambda}|v - J_\lambda v|^2 + \phi(J_\lambda v)$$

avec

$$J_\lambda v = (I + \lambda A)^{-1} v.$$

Par suite

$$\phi(J_\lambda u_\lambda(\delta)) + \int_0^\delta \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 dt \leqq \phi_\lambda(u_0) \leqq \phi(u_0). \tag{19}$$

Mais $J_\lambda u_\lambda(\delta) \to u(\delta)$ quand $\lambda \to 0$ et donc passant à la limite dans (19) quand $\lambda \to 0$, on a

$$\frac{du}{dt} \in L^2(0, \delta; H)$$

avec

$$\phi(u(\delta)) + \int_0^\delta \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt \leqq \phi(u_0). \tag{20}$$

Réciproquement. Supposons que $(du/dt) \in L^2(0, \delta; H)$.
Grâce à la proposition 2 on a

$$\phi(u(s)) = \phi(u(\delta)) + \int_s^\delta \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt \qquad \text{pour } 0 < s < \delta. \tag{21}$$

Le second membre de (21) étant borné quand $s \to 0$, on en déduit que $u_0 \in D(\phi)$ et de plus

$$\phi(u_0) \leqq \phi(u(\delta)) + \int_0^\delta \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt, \tag{22}$$

Comparant (20) et (22) on obtient

$$\phi(u_0) - \phi(u(\delta)) = \int_0^\delta \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt;$$

d'où il résulte que

$$\lim_{t \to 0} \phi(u(t)) = \phi(u_0).$$

Par ailleurs

$$|u(t) - u_0| \leqq \int_0^t \left|\frac{du}{dt}(s)\right| ds \leqq \sqrt{t}\left[\int_0^t \left|\frac{du}{dt}(s)\right|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t}\sqrt{\phi(u_0) - \phi(u(t))}$$

REMARQUE 5. Les estimations établies à la proposition 3 sont "assez" précises. En effet considérons sur $\mathbb{R}$ l'exemple suivant:

$$\phi(u) = \begin{cases} -\dfrac{1}{p}u^p & \text{si } u \geqq 0 \\ +\infty & \text{si } u < 0 \end{cases} \qquad \partial\phi(u) = \begin{cases} -u^{p-1} & \text{si } u > 0 \\ \phi & \text{si } u \leqq 0 \end{cases}$$

avec $0 < p < 1$.

On vérifie aisément que pour $u_0 > 0$ on a

$$u(t) = S(t)u_0 = [u_0^{2-p} + (2-p)t]^{1/(2-p)}$$

et

$$\frac{du}{dt}(t) = [u_0^{2-p} + (2-p)t]^{(p-1)/(2-p)}.$$

Pour $u_0 = 0$ on a $u(t) = 0(t^{1/(2-p)})$ et $(du/dt)(t) = 0(t^{(p-1)/(2-p)})$ p pouvant être choisi arbitrairement voisin de 0.

Comportement de u au voisinage de $t = +\infty$. On suppose maintenant que ϕ atteint son minimum et que $\min_H \phi = 0$. Soit $K = \{v \in H\,;\ \phi(v) = 0\}$.

PROPOSITION 4. *Soient $u_0 \in D(A)$ et $u(t) = S(t)u_0$. On a*

$$\left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right| \leqq \frac{2}{t}\operatorname{dist}(u_0, K) \qquad \forall t > 0$$

et $\int_0^{+\infty} \phi(u(t))dt \leqq \frac{1}{2}[\operatorname{dist}(u_0, K)]^2$

D'où en particulier $\phi(u(t)) \leqq 1/2t\ [\operatorname{dist}(u_0, K)]^2$.

DÉMONSTRATION. Soit $v_0 \in K$; prenant $v = v_0$ et $\varepsilon = 1$ dans (13) on a

$$\left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right| \leqq \frac{2}{t}|u_0 - v_0| \quad \forall v_0 \in K$$

(noter que $A^0 v_0 = 0$).

Par ailleurs, appliquant la première estimation de la démonstration du Théorème 1 avec $v = v_0$ et $f = 0$ on a

$$\int_0^T \phi(u(t))dt \leqq \frac{1}{2}|u_0 - v_0|^2 \qquad \forall v_0 \in K,\ \forall T > 0.$$

Enfin, comme la fonction $t \mapsto \phi(u(t))$ est décroissante, on a

$$T\phi(u(T)) \leqq \int_0^T \phi(u(t))dt.$$

REMARQUE 6. Les résultats de la proposition 4 ont été obtenus comme "sous produits" des techniques du §1 et nous n'avons pas cherché à obtenir les majorations les meilleures. Ces estimations semblent toutefois assez précises; en effet considérons sur $\mathbb{R}$ l'exemple suivant

$$\phi(u) = \frac{1}{p}|u|^p,\ \partial\phi(u) = |u|^{p-2}u \text{ avec } p \geqq 2.$$

On a

$$u(t) = S(t)u_0 = u_0[1 + (p-2)t|u_0|^{p-2}]^{-1/(p-2)}$$

et

$$\frac{du}{dt}(t) = |u_0|^{p-2}u_0[1 + (p-2)t|u_0|^{p-2}]^{-(1+1/(p-2))}.$$

Donc

$$\left|\frac{du}{dt}(t)\right| = 0(t^{-(1+1/(p-2))}) \text{ et } \phi(u(t)) = 0(t^{-(1+2/(p-2))})$$

p pouvant être choisi arbitrairement grand.

Il serait intéressant de déterminer si en général $du/dt \in L^1(\delta, +\infty; H)$ $\delta > 0$; ce qui impliquerait que $\lim_{t\to+\infty} u(t)$ existe. Notons à ce propos que si ϕ vérifie la propriété* "pour toute suite bornée x_n telle que $\phi(x_n) \to 0$ on a $\liminf d(x_n, K) = 0$" alors $\lim_{t\to+\infty} u(t)$ existe.

En effet, si $t' \geqq t$ on a

$$\operatorname{dist}(u(t'), K) \leqq |u(t') - v| \leqq |u(t) - v| \qquad \forall v \in K$$

et donc
$$\operatorname{dist}(u(t), K) \downarrow 0.$$

De plus

$$\begin{aligned}|u(t') - u(t)| &\leqq |u(t') - \operatorname{Proj}_K u(t)| + |\operatorname{Proj}_K u(t) - u(t)| \\ &\leqq 2|u(t) - \operatorname{Proj}_K u(t)| = 2\operatorname{dist}(u(t), K).\end{aligned}$$

Par conséquent $u(t)$ est de Cauchy quand $t \to +\infty$.

3. Équation avec second membre. On suppose pour simplifier que $\min_H \phi = 0$ (on peut toujours se ramener à ce cas).

PROPOSITION 5. *Soient $f \in L^2(0, T; H)$ et $u_0 \in \overline{D(A)}$. Alors il existe une fonction $u \in C([0, T]; H)$ unique vérifiant*

(23) *u est dérivable p.p. sur $]0, T[$*

(24) *$u(t) \in D(A)$ p.p. sur $]0, T[$*

(25) $$\frac{du}{dt} \in L^2(\delta, T; H) \qquad \forall 0 < \delta < T$$

avec $\left(\int_\delta^T |(du/dt)(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqq 2\left(\int_0^T |f|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + (1/\sqrt{\delta})|u_0 - v_0|$ $\forall v_0 \in K$.

---

* Si H est de dimension finite cette propriété est toujours vérifiée.

(26) *la fonction* $t \mapsto \phi(u(t))$ *appartient à* $L^1(0, T)$ *et elle est continue sur* $]0, T]$; *plus précisément la fonction* $t \mapsto \phi(u(t))$ *est absolument continue sur* $[\delta, T]$ $\forall 0 < \delta < T$, *et*

$$\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + \frac{d}{dt}\phi(u) = \left(f, \frac{du}{dt}\right) \qquad p.p.\ sur\ ]0, T[$$

(27) $$\frac{du}{dt} + (Au - f)^0 = 0 \qquad p.p.\ sur\ ]0, T[$$

(28) $$u(0) = u_0 \quad .$$

Si de plus $u_0 \in D(\phi)$, *alors on a* $du/dt \in L^2(0, T; H)$ *avec* $(\int_0^T |(du/dt)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \leqq (\int_0^T |f|^2 dt)^{\frac{1}{2}} + (\phi(u_0))^{\frac{1}{2}}$ *et la fonction* $t \mapsto \phi(u(t))$ *est continue sur* $[0, T]$.

REMARQUE 7.

Avec les notations de la remarque 3, on a

$$\frac{du}{dt}(t) + (E(Au(t)) - f(t))^0 = 0 \qquad \text{p.p. sur }]0, T[$$

i.e.

$$\frac{du}{dt}(t) + \mathrm{Proj}_{E(Au(t))} f(t) - f(t) = 0 \qquad \text{p.p. sur }]0, T[$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5

On considère l'équation approchée

(29) $$\begin{aligned} &\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = f \qquad \text{sur } [0, T] \\ &u_\lambda(0) = u_0 . \end{aligned}$$

Soit $v_0 \in K$ fixé; comme $\min_H \phi = 0$ on a $\phi_\lambda \geqq 0$ sur H et $\phi_\lambda(v_0) = 0$.

On reprend les idées de la démonstration du Théorème 1. On a

$$\phi_\lambda(v_0) - \phi_\lambda(u_\lambda(t)) \geqq (f(t) - \frac{du_\lambda}{dt}(t),\ v_0 - u_\lambda(t))$$

et par suite

$$\int_0^T \phi_\lambda(u_\lambda(t))dt \leqq \int_0^T |f(t)|\, |u_\lambda(t) - v_0|\, dt + \frac{1}{2}|u_0 - v_0|^2.$$

Retranchant de (29) $(dv_0/dt) + A_\lambda v_0 = 0$, il vient après multiplication par $u_\lambda - v_0$:

$$|u_\lambda(t) - v_0| \leqq |u_0 - v_0| + \int_0^t |f(s)|\, ds.$$

Donc

$$\int_0^T \phi_\lambda(u_\lambda(t))dt \leqq |u_0 - v_0| \int_0^T |f(t)|\,dt + \int_0^T |f(t)| \left(\int_0^t |f(s)|\,ds \right) dt$$

$$+ \frac{1}{2}|u_0 - v_0|^2 \leqq \left(\int_0^T |f(t)|\,dt \right)^2 + |u_0 - v_0|^2$$

$$\leqq T \int_0^T |f(t)|^2 dt + |u_0 - v_0|^2.$$

Soit

$$\frac{1}{T} \int_0^T \phi_\lambda(u_\lambda(t))dt \leqq \int_0^T |f(t)|^2 dt + \frac{1}{T}|u_0 - v_0|^2 \tag{30}$$

Fixant $\delta \in]0, T]$ et appliquant (30) (avec $T = \delta$) ainsi que le théorème de la moyenne on obtient $t_0 \in [0, \delta]$ tel que

$$\phi_\lambda(u_\lambda(t_0)) \leqq \int_0^\delta |f(t)|^2 dt + \frac{1}{\delta}|u_0 - v_0|^2.$$

D'autre part, on multiplie (29) par du_λ/dt et on intègre sur $]t_0, T[$. Il vient

$$\int_{t_0}^T \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right|^2 dt \leqq \int_{t_0}^T \left(f, \frac{du_\lambda}{dt} \right) dt + \phi_\lambda(u_\lambda(t_0)).$$

Par conséquent

$$\left(\int_\delta^T \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\int_{t_0}^T \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\int_{t_0}^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\phi_\lambda(u_\lambda(t_0))}$$

Enfin

$$\left(\int_\delta^T \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqq 2 \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\delta}}|u_0 - v_0| \tag{31}$$

Passage à la limite quand $\lambda \to 0$.

Supposant d'abord $u_0 \in D(\phi)$ on a

$$\int_0^T \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right|^2 dt \leqq \int_0^T \left(f, \frac{du_\lambda}{dt} \right) dt + \phi(u_0).$$

et par suite $(du_\lambda/dt)\lambda$ est borné dans $L^2(0, T; H)$.

Par ailleurs

$$\frac{1}{2}|u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 \leqq \int_0^t |A_\lambda u_\lambda(s) - A_\mu u_\mu(s)|\ |\lambda A_\lambda u_\lambda(s) - \mu A_\mu u_\mu(s)|\, ds$$

et comme $A_\lambda\, u_\lambda$ est borné dans $L^2(0, T; H)$ il en résulte que u_λ est de Cauchy dans $C([0, T]; H)$.

Donc $\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u$ dans $C([0, T]; H)$ et $\lim_{\lambda\to 0}(du_\lambda/dt) = du/dt$ dans $L^2(0, T; H)$ faible. On conclut aisément que $u(t) \in D(A)$ p.p. et $(du/dt) + Au \ni f$ p.p. sur $]0, T[$.

De plus, on a grâce à (31)

$$\left(\int_\delta^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqq 2\left(\int_0^T |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\delta}}|u_0 - v_0| \tag{32}$$

Enfin dans le cas général où $u_0 \in \overline{D(A)}$, on considère une suite $u_{0n} \in D(\phi)$ telle que $u_{0n} \to u_0$ dans H. Soit u_n la solution correspondante de l'équation

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f \text{ p.p. sur }]0, T[,\ u_n(0) = u_{0n}.$$

Il est immédiat que

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leqq |u_{0n} - u_{0m}| \qquad \forall t \in [0, T].$$

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$ dans $C([0, T]; H)$; u vérifie (23), (24), (25), (28) et

$$\frac{du}{dt} + \mathrm{Au} \ni f \text{ p.p. sur }]0, T[.$$

Enfin les propriétés (26), (27) et la remarque 7 découlent aisément du

LEMME 6. *Soit $u \in L^2(0, T; H)$ tel que $(du/dt) \in L^2(0, T; H)$ et $u(t) \in D(A)$ p.p. sur $]0, T[$.*

On suppose qu'il existe $g \in L^2(0, T; H)$ tel que $g(t) \in Au(t)$ p.p. sur $]0, T[$; alors la fonction $t \mapsto \phi(u(t))$ est absolument continue sur $[0, T]$. Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des points de $]0, T[$ où les fonctions $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto \phi(u(t))$ sont dérivables et où $u(t) \in D(A)$.

On a

$$\frac{d}{dt}\phi(u(t)) = \left(h, \frac{du}{dt}(t)\right) \qquad \forall t \in \mathscr{L},\ \forall h \in Au(t).$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 6. Soit $g_\lambda(t) = A_\lambda u(t)$. On a $|g_\lambda(t)| \leqq |A^0 u(t)| \leqq |g(t)|$ et $g_\lambda(t) \to A^0 u(t)$ p.p. sur $]0, T[$; par suite $g_\lambda(t) \to A^0 u(t)$ dans $L^2(0, T; H)$. D'autre part $(d/dt)\phi_\lambda(u) = (A_\lambda u, (du/dt))$ p.p. sur $]0, T[$ et donc

$$\phi_\lambda(u(t_2)) - \phi_\lambda(u(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \left(A_\lambda u, \frac{du}{dt}\right) dt \qquad \forall t_1, t_2.$$

Passant à la limite quand $\lambda \to 0$, on obtient

$$\phi(u(t_2)) - \phi(u(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \left(A^0 u, \frac{du}{dt}\right) dt \qquad \forall t_1, t_2.$$

Par conséquent la fonction $t \mapsto \phi(u(t))$ est absolument continue. Enfin, soit $t_0 \in \mathscr{L}$ et soit $h \in Au(t_0)$. On a $\phi(v) - \phi(u(t_0)) \geqq (h, v - u(t_0))$ $\forall v \in H$. Prenant $v = u(t_0 \pm \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, on obtient après division par ε et passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$

$$\frac{d}{dt}\phi(u(t_0)) = \left(h, \frac{du}{dt}(t_0)\right).$$

Supposant f plus régulière, on obtient des résultats supplémentaires.

PROPOSITION 7. *On suppose que* $f \in L^2(0, T; H)$ *avec* $f' = (df/dt) \in L^1(0, T; H)$ *et soit* $u_0 \in \overline{D(A)}$. *Alors la solution de* (27), (28) *vérifie de plus*

(33) *u est dérivable à droite* $\qquad \forall t \in]0, T[$

(34) $u(t) \in D(A) \qquad \forall t \in]0, T[$

(35) $$\frac{d^+u}{dt}(t) + (Au(t) - f(t))^0 = 0 \qquad \forall t \in]0, T[$$

(36) $$\left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right| \leqq \int_0^t |f'(s)|\,ds + (1+\varepsilon)\sup_{[0,t]}|f| + \left(\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)\frac{|u_0 - v_0|}{t}$$
$$\forall t > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall v_0 \in K.$$

(37) $\phi(u)$ *est dérivable à droite en tout* $t \in]0, T[$ *et*

$$\left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right|^2 + \frac{d^+}{dt}\phi(u(t)) = \left(f(t), \frac{d^+u}{dt}(t)\right) \qquad \forall t \in]0, T[.$$

Si $u_0 \in D(\phi)$, *on a de plus l'estimation*

$$\left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right| \leqq \int_0^t |f'(s)|\,ds + \sup_{[0,t]}|f| + \frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{\phi(u_0)}.$$

Si $u_0 \in D(A)$, *les propriétés* (33), (35), (37) *sont aussi valables pour* $t = 0$ *et on a*

$$\left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right| \leqq |(Au_0 - f(0))^0| + \int_0^t |f'(s)|\,ds \qquad \forall t \in [0, T[$$

DÉMONSTRATION Le point essentiel est la majoration (36); le reste en découle de manière standard (Cf [8]). Reprenons l'approximation (29)

Première estimation. D'après (30) on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T \phi(u_\lambda(t))dt \leqq T\Big(\sup_{[0,T]} |f|\Big)^2 + \frac{1}{T}|u_0 - v_0|^2$$

Seconde estimation. On a

$$\left(\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\int_0^T |f|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\phi(u_\lambda(0))}$$

Donc

$$\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right| dt \leqq T \sup_{[0,T]} |f| + \sqrt{T}\ \sqrt{\phi(u_\lambda(0))}.$$

Or la fonction

$$t \mapsto \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| - \int_0^t |f'(s)|\,ds$$

est décroissante et donc

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right| \leqq \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| + \int_t^T |f'(s)|\,ds \text{ pour } t \leqq T.$$

Par conséquent

$$T\left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right| \leqq \int_0^T\left(\int_t^T |f'(s)|\,ds\right)dt + T\sup_{[0,T]}|f| + \sqrt{T}\ \sqrt{\phi(u_\lambda(0))}.$$

D'où

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right| \leqq \int_0^T |f'(s)|\,ds + \sup_{[0,T]}|f| + \frac{1}{\sqrt{T}}\sqrt{\phi(u_\lambda(0))}.$$

Combinant ces deux estimations comme dans la démonstration du Théorème 1 on arrive à (36).

4. Perturbations

PERTURBATION LIPSCHITZIENNE. Soit ϕ une fonction convexe s.c.i de H dans $]-\infty, +\infty]$, $\phi \not\equiv +\infty$, $A = \partial\phi$ et soit B une application lipschitzienne de H dans H.

PROPOSITION 8. *Pour tout* $u_0 \in \overline{D(A)}$, *il existe une fonction* $u \in C([0, +\infty[\,;H)$ *unique vérifiant* (8), (9), (10) *et*

(38) $$\frac{d^+u}{dt}(t) + (Au(t) + Bu(t))^0 = 0 \text{ pour tout } t > 0$$

(39) $$u(0) = u_0$$

De plus, on a $(du/dt) \in L^\infty(\delta, T; H)$ $\forall 0 < \delta < T < +\infty$.

DÉMONSTRATION. Soit $u_{0n} \in D(A)$ tel que $u_{0n} \to u_0$. On sait qu'il existe u_n solution de

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n + Bu_n \ni 0 \qquad u_n(0) = u_{0n}$$

De plus $|u_n(t) - u_m(t)| \leqq e^{\omega t}|u_{0n} - u_{0m}|$

(ω = constante de lipschitz de B) et donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = u$ dans $C([0, T]; H)$

Par ailleurs Bu_n est borné dans $L^2(0, T; H)$ et l'estimation (25) montre que

$$\frac{du}{dt} \in L^2(\delta, T; H) \qquad \forall 0 < \delta < T,\ u(t) \in D(A) \text{ p.p. et}$$

$$\frac{du}{dt} + Au + Bu \ni 0 \qquad \text{p.p. sur }]0, T[.$$

Enfin comme $(d/dt)(Bu) \in L^2(\delta, T; H)$ on achéve la démonstration grâce à la proposition 7.

Perturbation maximale monotone.

Soient ϕ une fonction convexe s.c.i. de H dans $]-\infty, +\infty]$, $\phi \not\equiv +\infty$, $A = \partial\phi$ et soit B un graphe maximal monotone (B n'est pas nécessairement un sous différentiel). On suppose que $D(A) \subset D(B)$ et que B est localement dominé par A i.e. pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$ il existe un voisinage $V(u_0)$ de u_0, $k < 1/2$ et C tels que

(40) $$|B^0 u| \leqq k|A^0 u| + C \qquad \forall u \in D(A) \cap V(u_0).$$

On sait alors (cf. [6]. [8]) que $A + B$ est maximal monotone. Soit $P(t)$ le semi-groupe engendré par $-(A + B)$ sur $\overline{D(A)}$.

PROPOSITION 9. *Si* $u_0 \in \overline{D(A)}$ *alors* $u(t) = P(t)u_0 \in D(A)$ *pour tout* $t > 0$ *et il existe* C_1, C_2 *tels que*

(41) $$|(AP(t)u_0 + BP(t)u_0)^0| \leqq C_1 + C_2/t \qquad \forall t > 0.$$

DÉMONSTRATION. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\min_H \phi = 0$. Le problème approché

(42) $$\frac{d^+u_\lambda}{dt} + Au_\lambda + B_\lambda u_\lambda \ni 0, \qquad u_\lambda(0) = u_0$$

admet une solution d'après la proposition 8. Comme $A+B$ est maximal monotone on sait (cf [2] theorem 2.1) que

$$\lim_{\lambda\to 0} (I+\alpha(A+B_\lambda))^{-1}z = (I+\alpha(A+B))^{-1}z \qquad \forall\alpha>0,\ \forall z\in H$$

et par suite (cf [3] theorem 3.2)

$$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda(t) = u(t) \text{ uniformément sur les intervalles bornés.}$$

Donc il existe $T>0$ et $\lambda_0>0$ tels que

$$u_\lambda(t)\in V(u_0) \text{ pour } 0\leqq t\leqq T \text{ et } 0<\lambda<\lambda_0$$

Grâce à l'hypothèse (40) on a

$$|B_\lambda u_\lambda(t)| \leqq |B^0u_\lambda(t)| \leqq k|A^0u_\lambda(t)|+C \leqq k\left(|B_\lambda u_\lambda(t)|+\left|\frac{d^+u_\lambda}{dt}(t)\right|\right)+C$$

d'où il vient

$$(43)\qquad |B_\lambda u_\lambda(t)| \leqq \left(\frac{k}{1-k}\right)\left|\frac{d^+u_\lambda}{dt}(t)\right|+\frac{C}{1-k} \quad \forall t\in]0,T[,\ \forall\lambda\in]0,\lambda_0[.$$

Soient $0<a<b<T$ et soit v_0 tel que $\phi(v_0)=0$.

Première estimation. On a

$$\phi(v_0)-\phi(u_\lambda(t)) \geqq \left(-\frac{du_\lambda}{dt}(t) - B_\lambda u_\lambda(t),\ v_0-u_\lambda(t)\right).$$

Donc

$$\int_a^b \phi(u_\lambda(t))dt \leqq \int_a^b (B_\lambda u_\lambda(t), v_0-u_\lambda(t))dt+\frac{1}{2}|u_\lambda(a)-v_0|^2$$

$$\leqq \int_a^b (B_\lambda v_0, v_0-u_\lambda(t))dt+\frac{1}{2}|u_\lambda(a)-v_0|^2.$$

Or
$$|u_\lambda(t)-v_0| \leqq |u_\lambda(a)-v_0|+(t-a)|B^0v_0|.$$

Par conséquent

$$(44)\qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(u_\lambda(t))dt \leqq (b-a)|B^0v_0|^2+\frac{1}{b-a}|u_\lambda(a)-v_0|^2$$

Seconde estimation. On a pour tout $\lambda\in]0,\lambda_0[$

$$(45)\qquad \left|\frac{d^+u_\lambda}{dt}(b)\right| \leqq \frac{C}{1-2k}+\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sqrt{\frac{1-k}{1-2k}}\ \sqrt{\phi(u_\lambda(a))}.$$

En effet, multipliant (42) par (du_λ/dt) et intégrant sur $]a, b[$ il vient grâce à (43)

$$\int_a^b \left|\frac{d^+u_\lambda}{dt}\right|^2 dt \leqq \int_a^b |B_\lambda u_\lambda|\left|\frac{d^+u_\lambda}{dt}\right| dt + \phi(u_\lambda(a)) \leqq \frac{k}{1-k}\int_a^b \left|\frac{d^+u_\lambda}{dt}\right|^2 dt$$

$$+\frac{C}{1-k}\int_a^b \left|\frac{d^+u_\lambda}{dt}\right| dt + \phi(u_\lambda(a)).$$

Par suite

$$\left(\int_a^b \left|\frac{d^+u_\lambda}{dt}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{C\sqrt{b-a}}{1-2k} + \sqrt{\frac{1-k}{1-2k}}\,\sqrt{\phi(u_\lambda(a)}.$$

Enfin, comme $|(d^+u_\lambda/dt)\lambda|$ est décroissant on en déduit (45).

Soit maintenant $0 < a < \theta < t < T$.

Appliquant l'estimation (44) avec $b = \theta$ et le théorème de la moyenne on voit qu'il existe $t_0 \in [a, \theta]$ tel que

$$\phi(u_\lambda(t_0)) \leqq (\theta - a)\,|B^0 v_0|^2 + \frac{1}{\theta - a}|u_\lambda(a) - v_0|^2.$$

Ensuite l'estimation (45) pour $a = t_0$ et $b = t$ conduit à

$$\left|\frac{d^+u_\lambda}{dt}(t)\right| \leqq \frac{C}{1-2k} + \frac{1}{\sqrt{t-\theta}}\sqrt{\frac{1-k}{1-2k}}\left(\sqrt{\theta - a}\,|B^0 v_0| + \frac{1}{\sqrt{\theta - a}}|u_\lambda(a) - v_0|\right).$$

Faisant tendre a vers 0 et posant $\varepsilon = \sqrt{\theta}/\sqrt{t-\theta}$, on obtient

$$\left|\frac{d^+u_\lambda}{dt}(t)\right| \leqq \frac{C}{1-2k} + \sqrt{\frac{1-k}{1-2k}}\left(\varepsilon\,|B^0 v_0| + \left(\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)\frac{|u_0 - v_0|}{t}\right)$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t \in]0, T[,\ \forall \lambda \in]0, \lambda_0[$$

Enfin comme $t \to \left|\frac{d^+u_\lambda(t)}{dt}\right|$ est décroissant on a

$$\left|\frac{d^+u_\lambda}{dt}(t)\right| \leqq C_1 + \frac{C_2}{t} \qquad \forall t > 0,\ \forall \lambda \in]0, \lambda_0[$$

où C_1 et C_2 sont indépendants de λ.

5. Applications

Soit Ω un ouvert borné de R^n de frontière Γ réguière et soit $H = L^2(\Omega)$.

Exemple 1

Soit $\Psi \in H^2(\Omega)$, $\Psi \leqq 0$ p.p. sur Γ et soit $K = \{u \in H;\, u \geqq \Psi \text{ p.p. sur } \Omega\}$. On définit sur H

$$\phi(u) = \begin{cases} \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx & \text{si } u \in H_0^1(\Omega) \cap K \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Il est clair que ϕ est une fonction convexe s.c.i sur H, $\phi \not\equiv +\infty$ et on sait (cf [4]) que $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap K$

$$Au = -\Delta u + \partial\Psi_k(u)$$

où

$$\partial\Psi_k(u) = \left\{ \begin{array}{ll} f \in L^2(\Omega);\ f = 0 & \text{p.p. sur } [u > \Psi] \\ \qquad\qquad\ \text{et } f \leqq 0 & \text{p.p. sur } [u = \Psi] \end{array} \right\}$$

Donc pour tout $u_0 \in \overline{D(A)} = K$ il existe une solution unique du problème

$$\begin{array}{ll} u(x,t) \geqq \Psi(x) & \text{sur } \Omega \times]0,T[\\ \dfrac{\partial^+ u}{\partial t} = \Delta u & \text{sur } [u > \Psi] \\ \dfrac{\partial^+ u}{\partial t} = \max\{\Delta\Psi, 0\} & \text{sur } [u = \Psi] \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{array}$$

on a

(46) $u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C(]0,T];H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\delta,T;H^2(\Omega))$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\delta,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(\delta,T;H^1(\Omega)) \qquad \forall 0 < \delta < T < +\infty,$$

et pour tout $t > 0$ $\quad u(x,t) \in H^2(\Omega)$.

Si $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap K$ alors on a de plus

(47) $$u \in C([0,T];H^1(\Omega)) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega));$$

si $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap K$ alors

(48) $$u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Exemple 2.

Soit j une fonction convexe s.c.i. de R dans $]-\infty, +\infty]$, $j \not\equiv +\infty$ et soit $\beta = \partial j$.

On définit sur $H = L^2(\Omega)$

$$\phi(u) = \begin{cases} \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 dx + \int_\Gamma j(u) d\Gamma & \text{si } u \in H^1(\Omega) \text{ et } j(u) \in L^1(\Gamma) \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On vérifie aisément que ϕ est une fonction convexe s.c.i sur H, $\phi \not\equiv +\infty$. On sait (cf [1]) que $D(A) = \{u \in H^2(\Omega);\ -(\partial u/\partial n) \in \beta(u) \text{ p.p. sur } \Gamma\}$ et $Au = -\Delta u$. Donc pour tout $u_0 \in \overline{D(A)} = L^2(\Omega)$ il existe une solution unique du problème

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^+ u}{\partial t} - \Delta u = 0 && \text{sur } \Omega \times]0, T[\\ &-\frac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u) && \text{sur } \Gamma \times]0, T[\\ &u(x,0) = u_0(x) && \text{sur } \Omega \end{aligned}$$

et u vérifie (46).

Si $u_0 \in H^1(\Omega)$ et $j(u_0) \in L^1(\Gamma)$, alors u vérifie de plus (47); si $u_0 \in H^2(\Omega)$, $(u_0) \in L^1(\Gamma)$ et $-(\partial u_0/\partial n) \in \beta(u_0)$ p.p. sur Γ alors u vérifie (48).

Dans le cas particulier où $j(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geqq 0 \\ +\infty & \text{si } r < 0 \end{cases}$

on retrouve les inéquations variationnelles paraboliques introduites par Lions-Stampacchia [10]; le problème correspondant à $j(r) = |r|$ a été étudié par Duvaut-Lions [7].

Nous avons aussi obtenu (Cf [1]) des résultats de régularité dans les espaces L^p pour ces problèmes.

Autres Choix Possibles

$H = L^2(\Omega)$ et $\phi(u) = \sum_i \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ conduit à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0;$$

$H = H^{-1}(\Omega)$ et $\phi(u) = \int_\Omega j(u)dx$ conduit à l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta(\beta(u)) = 0$.

APPENDICE
REGULARISATION DES FONCTIONS CONVEXES

Soit H un espace de Hilbert et soit $\phi: H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe s.c.i. $\not\equiv \infty$. On pose pour $\lambda > 0$

$$\phi_\lambda(u) = \inf_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \left| u - v \right|^2 + \phi(v) \right\} \tag{49}$$

PROPOSITION 10. *ϕ_λ estune fonction convexe Fréchet différentiable sur H et sa différentielle $\partial\phi_\lambda$ coincide avec la régularisée Yosida $(\partial\phi)_\lambda = (I-(I+\lambda\partial\phi)^{-1})/\lambda$ de $\partial\phi$.*

Le inf en (49) est atteint pour $v = J_\lambda u = (I + \lambda\partial\phi)^{-1}u$ et donc

$$\phi_\lambda(u) = \frac{1}{2\lambda} |u - J_\lambda u|^2 + \phi(J_\lambda u) = \frac{\lambda}{2} |\partial\phi_\lambda(u)|^2 + \phi(J_\lambda u).$$

D'autre part $\phi_\lambda(u) \uparrow \phi(u)$ quand $\lambda \downarrow 0$ pour tout $u \in H$.

DÉMONSTRATION La convexité et la différentiabilité de ϕ_λ sont dûs à Moreau [11] (propositions 7b et 7d). Il est immédiat, d'après la définition (49) que $\phi_\lambda(u)$ croît quand λ décroit.

Pour montrer que $\lim_{\lambda \to 0} \phi_\lambda(u) = \phi(u)$ nous distinguerons deux cas. Si $\phi(u) < +\infty$, on a $u \in \overline{D(A)}$ (cf Remarque 4) et donc $\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda u = u$; d'où $\lim_{\lambda\to 0} \inf \phi(J_\lambda u) \geqq \phi(u)$.

Il résulte de l'inégalité

$$\phi(J_\lambda u) \leqq \phi_\lambda(u) \leqq \phi(u)$$

que

$$\lim_{\lambda\to 0} \phi_\lambda(u) = \phi(u)$$

Supposons que $\phi(u) = +\infty$ et prouvons que $\lim_{\lambda\to 0} \phi_\lambda(u) = +\infty$; sinon il existerait $\lambda_n \to 0$ et $C < +\infty$ tels que

$$\phi_{\lambda_n}(u) \leqq C, \text{ i.e. } \frac{1}{2\lambda_n} |u - J_{\lambda_n} u|^2 + \phi(J_{\lambda_n} u) \leqq C.$$

Comme $\phi(J_{\lambda_n} u) - \phi(v) \geqq (f, J_{\lambda_n} u - v)$ $(f \in \partial\phi(v))$ on en déduit que

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \quad u - J_{\lambda_n} u = 0.$$

D'autre part $\phi(J_{\lambda_n} u) \leqq C$ et donc $\phi(u) \leqq C$, ce qui conduit à une contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Brézis, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures Appl. (à paraître).

2. H. Brézis, M. Crandall and A. Pazy, *Perturbations of non linear maximal monotone sets in Banach spaces*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 123–144.

3. H. Brézis and A. Pazy, *Semi-groups of nonlinear contractions on convex sets*, J. Functional Analysis **6** (1970), 237–281.

4. H. Brézis et G. Stampacchia, *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. Soc. Math. France **96** (1968), 153–180.

5. F. Browder, *Non linear operators and non linear equations of evolution in Banach spaces*, Symp. Nonlinear Funct. Anal. AMS Chicago 1968.

6. M. Crandall and A. Pazy, *Semigroups of nonlinear contractions and dissipative sets*, J. Functional Analysis **3** (1969), 376–418.

7. G. Duvaut et J. L. Lions, Livre à paraître.

8. T. Kato, *Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces*, Symp. Nonlinear Funct. Anal. AMS Chicago 1968.

9. Y. Komura, *Nonlinear semigroups in Hilbert spaces*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 493–507.

10. J. L. Lions and G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 493–519.

11. J. J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace hilbertien*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 273–299.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES 11 QUAI S^t BERNARD PARIS 5^e